

Aula 14

Regreto e Física

1. Introdução

Qual o problema até agora é dado?

Dado uma certa distribuição de cargas

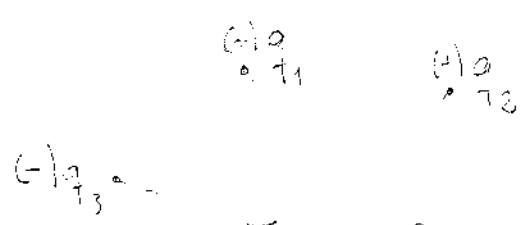
q_1, q_2, q_3 qual a força que as cargas

exercem sobre carga Q . Pelo princípio

de superposição a força total sobre Q

é a soma de cada uma das forças produzidas

por $q_1, q_2, \dots$ (ver Fig. 1):



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Fig. 1

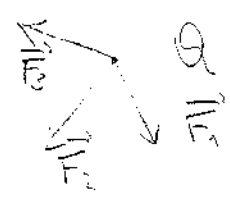
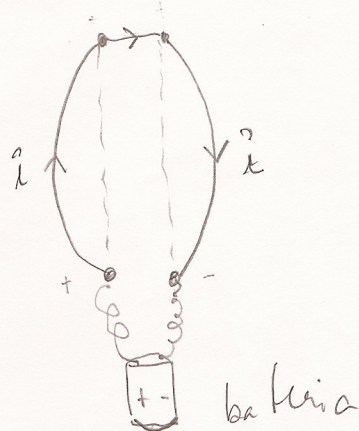


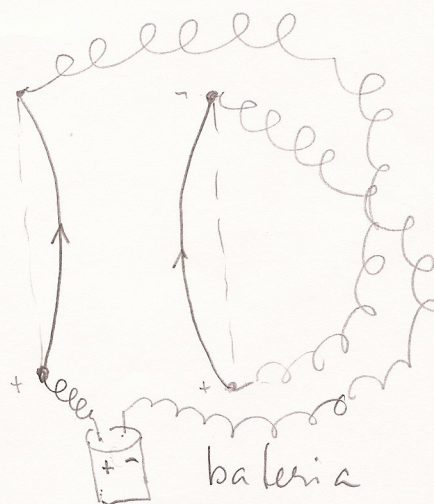
Fig. 1

Entretanto, até agora o estudo desse problema tem se concentrado numa situação muito particular: Q em repouso.

O que acontece com cargas em movimento, como no caso de correntes circulando num circuito?



correntes
em direções
opostas
(fios se repelem!)



correntes na
mesma direção
(fios se atraem!)

Fig. 2

O ponto importante é perceber que a força de atração ou repulsão que faz com que os fios se deformem não pode ser de natureza eletrostática. (7).

Na verdade, cargas paradas (estáticas) produzem campo elétrico,

cargas em movimento produzem (em adição)

no espaço ao seu redor campo magnético.

Um aspecto interessante relacionado ao campo magnético é que:

aparece como resultado da circulação
da corrente por um fio e
sua direção no espaço (ver Fig. 3):

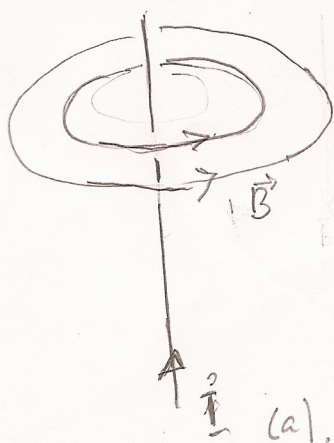


Fig. 3.a



(b)

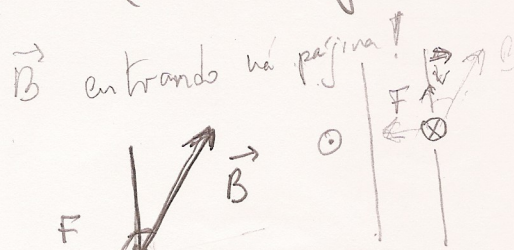


Fig. 3.b

O campo magnético é dado pela regra da mão direita.
Quando outro fio com mesma direção de corrente é
aproximado aparece uma força

A questão é como relacionar as
direções e sentidos de $\vec{B}$, $\vec{F}$ e I ?

2. Forças magnéticas

A situação descrita na Fig. 3 pode ser sintetizada pela equação abaixo:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{SI} \quad (1.a)$$

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \frac{Q}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{CGS}$$

força de Lorentz! Em presença de um campo elétrico adicional, a força de Lorentz torna-se

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{SI} \quad (1.b)$$

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right) \quad \text{CGS}$$

Exemplo

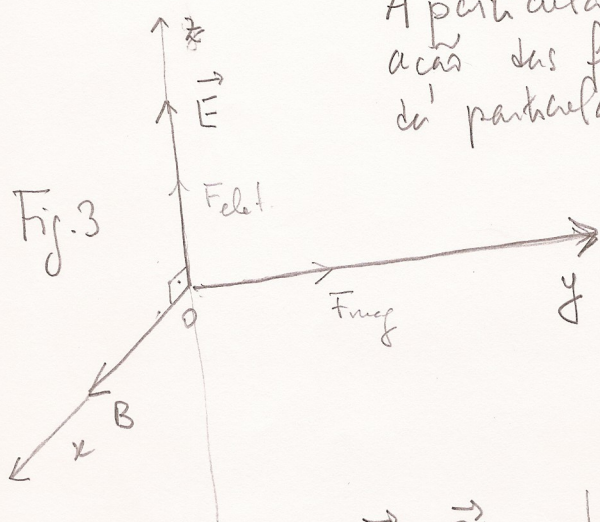
(Exemplo 5.2, Griffiths, página 205)

A partícula está em repouso em $t=0$. Sob ação das forças mostradas na Fig. 3, qual a trajetória da partícula? Sem força na direção x (e direção x)

$$\vec{v} = (0, \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$\vec{v} = \frac{dy(t)}{dt} \hat{y} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{z}$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{z} & \hat{y} & \hat{x} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$



Agora como

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = Q(E\hat{z} + B\dot{y}\hat{j} - B\dot{z}\hat{i}) = m\vec{a}$$

$$Q(E - B\dot{z}) = m\ddot{z} \rightarrow m \frac{d^2 z}{dt^2} = Q(E - B\dot{z})$$

$$QB\dot{z} = m\ddot{y} \rightarrow m \frac{d^2 y}{dt^2} = -QB \frac{dz}{dt}$$

Definindo a frequência de ciclotron $\omega \equiv \frac{QB}{m}$,

as equações diferenciais ficam:

$$\begin{cases} \ddot{z} = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right) \\ \omega \dot{z} = \ddot{y} \end{cases}$$

$$\ddot{y} + \ddot{z} = 0$$

Solucão geral

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + (E/B)t + C_3$$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t + E/B$$

$$z(t) = C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4$$

$$\dot{z}(t) = -\omega C_2 \sin \omega t - \omega C_1 \cos \omega t$$

Condições iniciais

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$z(0) = 0$$

Aplicando as condições iniciais para
determinar as constantes arbitrárias C_1, C_2, C_3
e C_4 .

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \end{cases}$$

$$+ \omega C_2 = -E/B$$

$$\longrightarrow C_2 = -\frac{E}{\omega B} \longrightarrow C_4 = \frac{E}{\omega B}$$

$$- \omega C_1 = 0$$

$$\longrightarrow C_1 = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

So

$$y(t) = -\frac{E}{\omega B} \sin \omega t + \frac{E}{\omega B} \omega t$$

$$y(t) = \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t)$$

$$z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos \omega t + \frac{E}{\omega B}$$

$$z(t) = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t)$$

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t) \\ z(t) = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t) \end{cases}$$

$$\omega = \frac{q}{m} B$$

8.a

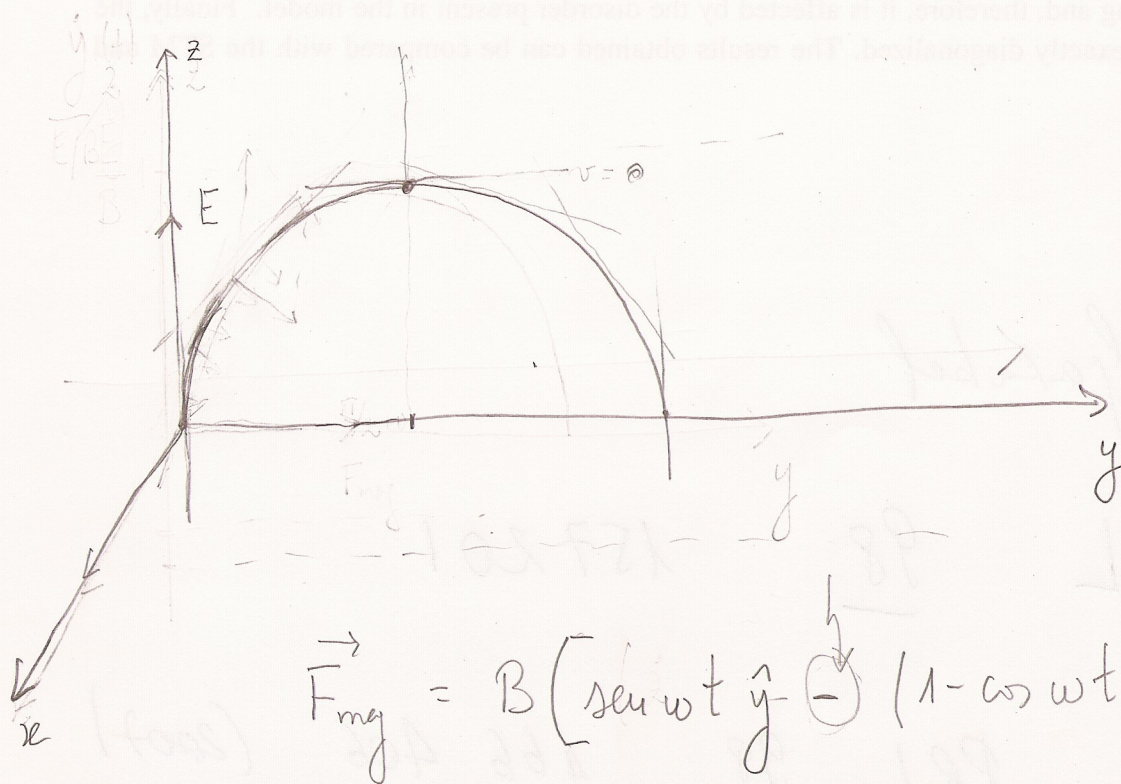
$$\dot{y}(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{E}{B} \sin \omega t$$

$$v = \frac{E}{B} \sqrt{1 + \cos^2 \omega t - 2 \cos \omega t + \sin^2 \omega t} = \sqrt{2(1 - \cos \omega t)}$$

$$\ddot{y} = \frac{E}{B} \omega \sin \omega t \rightarrow \ddot{y} = 0 \text{ para } t = 0, \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}, \dots$$

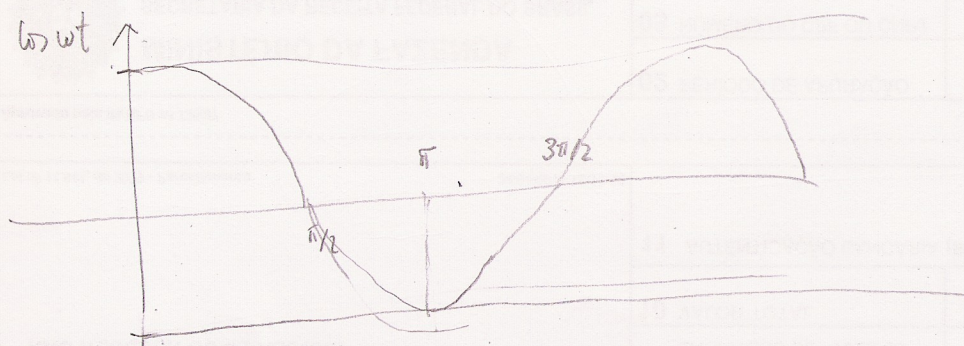
$$\ddot{z} = \frac{E}{B} \omega \cos \omega t \rightarrow \ddot{z} = 0 \text{ para } t = \frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}, \dots$$



$$\vec{F}_{mg} = B \left[\sin \omega t \hat{y} - (1 - \cos \omega t) \hat{z} \right]$$

F_y F_z

t	$\sin \omega t$	$1 - \cos \omega t$
0	0	0
$\pi/2\omega$	1	1
π/ω	0	2
$3\pi/2$	-1	1
2π	0	0



ou definido

$$R \equiv \frac{E}{\omega B}$$

e resolvendo as Equações acima

como:

$$y - R\omega t = R \sin \omega t$$

$$z - R = R \cos \omega t$$

ou

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

que corresponde no plano yz a

círculos centrados nos ptos $(R\omega t, R)$

Coordenadas do centro do círculo

$$y_{\text{centro}} = R w t$$

$$z_{\text{centro}} = R$$

logo $\dot{y}_{\text{centro}} = R w$

$$\dot{z} = 0$$

então $v_{\text{centro}, y} \equiv \dot{y}_{\text{centro}} = R w = \frac{E}{B w} \cdot w$

$$v_{\text{centro}, y} = \frac{E}{B}$$

A curva gerada é cicloide

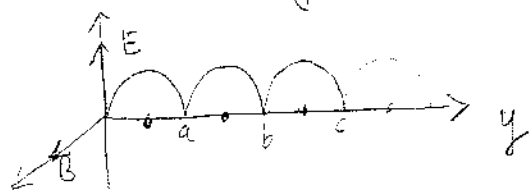


Fig. 4

Um aspecto interessante das forças magnéticas é se Q se move

por $d\vec{l}$, como:

$$d\vec{l} = \vec{v} dt \quad \rightarrow \quad d\vec{l} \parallel \vec{v} \quad (2)$$

então o trabalho realizado por

essa força

$$dW_{\text{mag}} = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

$$dW_{\text{mag}} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= Q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt$$

mas $\odot$ vetor $\vec{v} \times \vec{B}$ é perpendicular a

a $\vec{v}$, logo $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$

ou seja

$$dW_{\text{seg}} = 0 \quad (4)$$

Corrente

Densidade linear de carga λ ($[\lambda] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{metro}}$)
então a corrente pode ser dada como:

$$I = v\lambda \quad (3) \quad ([I] = \frac{\text{metro Coulomb}}{\text{s metro}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{s}} = \text{Ampere})$$

ou podemos escrever

$$\vec{I} = \lambda \vec{v} \quad (4)$$

como

mostrado

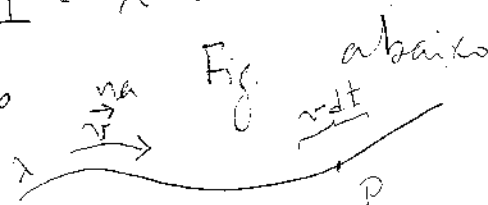


Fig. 5

então pela eq. (1):

$$d\vec{F}_{mag} = (\vec{v} \times \vec{B}) dq$$

ou

$$\vec{F}_{mag} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) dq \quad (5)$$

mas como $I = \frac{dq}{dt} = 2\vec{v}$

podemos escrever:

$$dq = 2v dt = 2 \frac{dl}{dt} dt$$

$$dq = 2 dl$$

Combinando eqs. (5) e (6), temos

com

$$\vec{F}_{mag} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) 2 dl \quad (7)$$

ou

$$\vec{F}_{mag} = \int (\lambda \vec{v} \times \vec{B}) dl = \int (\vec{I} \times \vec{B}) dl \quad (8)$$

Como $\vec{I}$ e $d\vec{l}$ apontam na
mesma direção, a Eq (7)

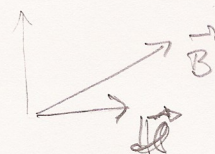
$$\vec{F}_{mag} = \int I (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (9)$$

Se a corrente I é constante

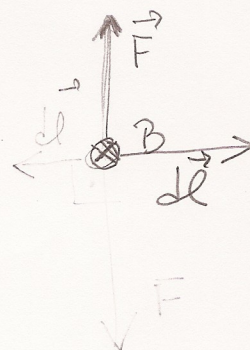
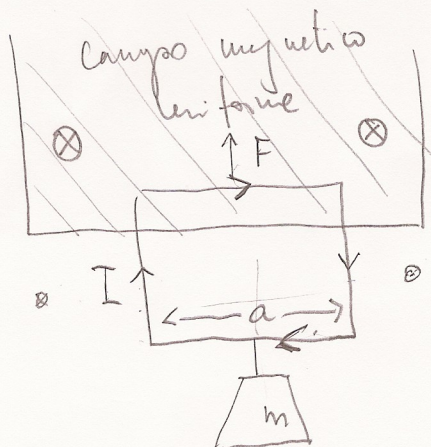
$$\vec{F}_{mag} = I \int (d\vec{l} \times \vec{B})$$

Exemplo

$$\vec{F}_{\text{mag}} = I \int (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$



$$d\vec{\ell} \times \vec{B}$$



$$F_{\text{mag}} = I B a$$

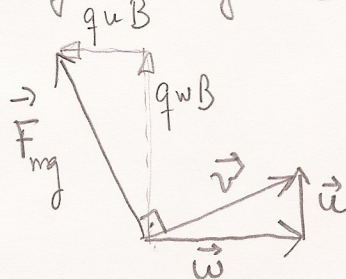
→

$$mg = I B a$$

$$I = \frac{B a}{mg}$$

E se aumentamos a corrente para um

valor maior que $\frac{B a}{mg}$, em princípio parece que $W_{\text{mag}} = F_{\text{mag}} \cdot h = I B a h$



$$F_{\text{ext}} = q w B$$

$$= \lambda a w B$$

$$F_{\text{ext}} = I B a$$

$$F_{\text{mag}} = q w B$$

F há se opõe ao fluxo de corrente

$$\vec{F} = \lambda a u B$$

Se num tempo dt a carga realiza
uma trajetória cuja distância é $u dt$
na direção horizontal

$$\begin{aligned} W_{\text{bateria}} &= \int F_{\text{horizontal}} dl = \lambda a B \int_{-h}^h u u dt = \\ &= \lambda a B \underbrace{(u)}_{\text{constante}} \int_0^h \frac{dx}{dt} dt \\ &= I a B h \end{aligned}$$

$$W_{\text{bateria}} = F_{\text{mag}} h$$

Conclusão!